- منظومة من النقاط المادية:

- في حالة لدينا مجموعة نقاط مادية:

$$\vec{\sigma}_o = \sum_{i=1}^{n} \vec{OA_i} \wedge m_i \vec{v_i}$$

$$T_o = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_{A_i}$$

- أما الجسم الصلب فنكتب:

نعتبر جسم عنصري A كتلته dm وسرعته $\vec{v}$ عندئذ:

$$\vec{\sigma}_o = \int \vec{OA} \wedge \vec{v} \, dm$$

حيث dm هو الحيز العنصري الذي يشغله الجسم.

$$T_o = \frac{1}{2} \int_S (\vec{v})^2 \, dm$$

$$\vec{P} = \int_S \vec{v}_A \, dm$$

ملاحظة: ينطبق مركز الثقل G على مركز التكتل C في أي جسم على سطح الأرض أو قريب من سطح الأرض..

* أهم المجموعات المتصلة هي الجسم الصلب والسوائل والغازات.. ومن ميزات المجموعات المتصلة أن المسافات بين جميع نقاطها ثابتة.

- مبرهنة كونيغ:

① $\vec{\sigma}_o(S) = \vec{\sigma}_o(G) + \vec{\sigma}_G(S)$

حيث G هي مركز التكتل

② $T_o(S) = T_o(G) + T_G(S)$

ملاحظة:

- عزم الحركة بالنسبة لمحور ما يساوي مسقط العزم الحركي بالنسبة لنقطة O من هذا المحور على هذا المحور.

① حساب العزم الحركي بالنسبة لمحور بغض النظر عن طبيعة الحركة وهذا المحور ثابت ومار من O عندئذ:

ليكن Δ محور مار من نقطة ثابتة O و Δ_1 محور مار من نقطة G ليست بالضرورة ثابتة بحيث $\Delta \parallel \Delta_1$ عندها يمكن تطبيق كونيغ

$$\sigma_\Delta(S) = \sigma_\Delta(G) + \sigma_{\Delta_1}(S)$$

تم توضيح المسقط مع الحاصل الاتجاهي (بالنقطة)..

② بخصوص الطاقة الحركية لحسابها بالنسبة لمحور بنفس الطريقة فهنا كحسابها بالنسبة للنقطة O.

تطبيقات العزم الحركي في الجسم الصلب:

- بالحركة الانسحابية تكون السرعة في كل لحظة متساوية وهذه السرعات مجتمعة تتغير معاً في نفس اللحظة.



- حساب سرعة مركز الكتلة فهي سرعة أي نقطة من الهيكل ما دامت هذه السرعات متساوية

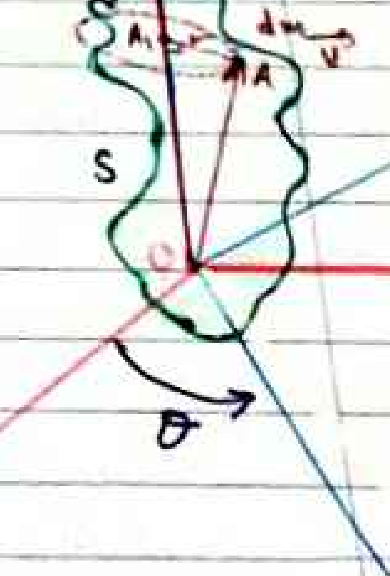
ملاحظة: لحساب العزم الحركي لجسم يدور حول محور دوران في حالة الدوران (بالنسبة لمحور الدوران):

- جسم صلب يدور حول محور ثابت ضمن حساب العزم الحركي:

- في حركة الجسم الصلب إن زاوية الدوران هي وسيط مستقل للحركة

نأخذ النقطة O ثابتة من المحور ثم نكمل الثلاثية OXYZ

ولو رسمنا محور Oz و OX هذه محملة ثابتة يشكل زاوية θ حسب الشكل:



نأخذ الجسيم المفرد A الذي كتلته dm ومتجه موضعه $\vec{OA}$ وبعده عن محور الدوران ثابتة دوماً أي أنه $r = |\vec{A_1A}|$

حيث A_1 تشكل مركز دائرة مسار A

وبالتالي العزم الحركي لها هو مقدار عددي.

- إن العزم الحركي للنقطة A يعطى بالعلاقة

$$r.v\,dm$$

وبالتالي العزم الحركي للجسم كاملاً بالنسبة لمحور الدوران Δ (حيث كتلة الجسم m)

$$\sigma_\Delta = \int_S r.v\,dm$$

ملاحظة: $\vec{V}$ هي بالاحداثيات القطبية لـ A مع الدائرة أي

$$V = r\dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \sigma_z(S) = \int_S r^2\dot{\theta}\,dm$$

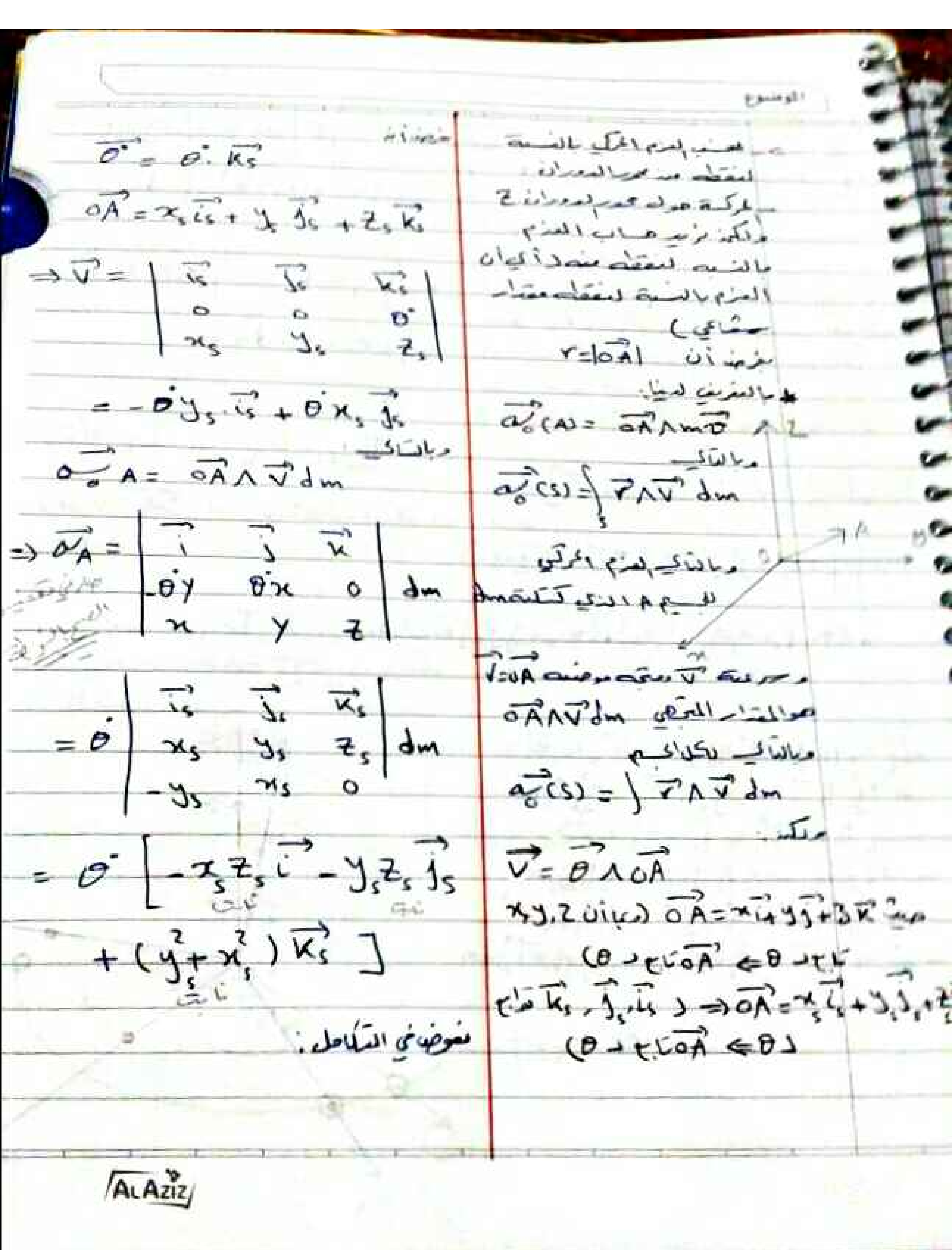
وبما أن θ مستقلة

$$\Rightarrow \sigma_z(S) = \dot{\theta}\int_S r^2\,dm = I_z$$

وهو عزم عطالة الجسيم المفرد A

$$\Rightarrow \sigma_z(S) = I_z \cdot \dot{\theta}$$

وهو العزم الحركي في حالة الدوران بالنسبة لمحور الدوران.



الموضوع:

نحسب العزم الحركي بالنسبة لنقطة من محور الدوران.

حركة حول محور الدوران Z

لكننا نريد حساب العزم بالنسبة لنقطة منه (أي أن العزم بالنسبة لنقطة مقدار متجهي)

نفرض أن $r = |\vec{OA}|$

* بالتعريف لدينا:

$$\vec{\sigma_0}(A) = \vec{OA} \wedge m\vec{v}$$

وبالتالي

$$\vec{\sigma_0}(S) = \int_S \vec{r} \wedge \vec{v}\, dm$$

وبالتالي العزم الحركي للجسم A الذي كتلته dm

وحيث $\vec{v}$ سرعة موضعه $\vec{v} = \vec{OA}$

هو المقدار التفاضلي $\vec{OA} \wedge \vec{v}\, dm$

وبالتالي لكل الجسم

$$\vec{\sigma_0}(S) = \int \vec{r} \wedge \vec{v}\, dm$$

ولكن:

$$\vec{V} = \vec{\theta} \wedge \vec{OA}$$

حيث $\vec{OA} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ (متغيرات x, y, z)

تابع لـ θ ⇐ ($\vec{OA}$ تابع لـ θ)

ثابتة لـ $\vec{i_s}, \vec{j_s}, \vec{k_s}$ ⇐ $\vec{OA} = x_s\vec{i_s} + y_s\vec{j_s} + z_s\vec{k_s}$

لـ θ ⇐ ($\vec{OA}$ تابع لـ θ)

تمرين:

$$\vec{\dot\theta} = \dot\theta\,\vec{k_s}$$

$$\vec{OA} = x_s\vec{i_s} + y_s\vec{j_s} + z_s\vec{k_s}$$

$$\Rightarrow \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i_s} & \vec{j_s} & \vec{k_s} \\ 0 & 0 & \dot\theta \\ x_s & y_s & z_s \end{vmatrix}$$

$$= -\dot\theta y_s\,\vec{i_s} + \dot\theta x_s\,\vec{j_s}$$

وبالتالي

$$\vec{\sigma_0}A = \vec{OA} \wedge \vec{V}\, dm$$

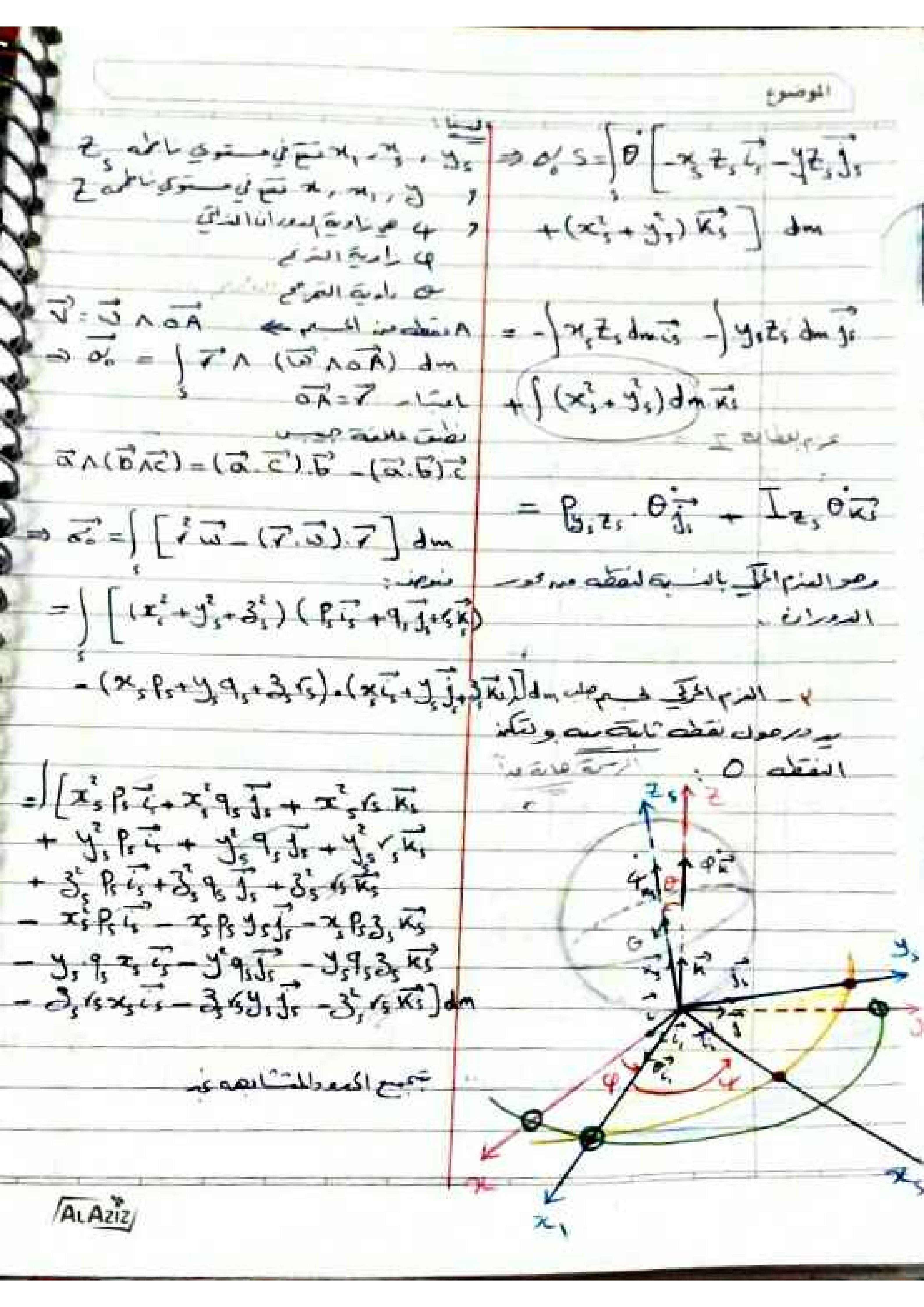
$$\Rightarrow \vec{\sigma_A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\dot\theta y & \dot\theta x & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} dm$$

$$= \dot\theta \begin{vmatrix} \vec{i_s} & \vec{j_s} & \vec{k_s} \\ x_s & y_s & z_s \\ -y_s & x_s & 0 \end{vmatrix} dm$$

$$= \dot\theta\left[-x_s z_s\,\vec{i} - y_s z_s\,\vec{j_s} + (y_s^2 + x_s^2)\,\vec{k_s}\right]$$

نعوض في التكامل:

ALAziz



$$\Rightarrow \vec{\sigma}_o^{S} = \int_S \dot{\theta}\left[-x_s z_s \vec{i_s} - y_s z_s \vec{j_s} + (x_s^2 + y_s^2)\vec{k_s}\right] dm$$

$$= -\int x_s z_s \, dm \, \vec{i_s} - \int y_s z_s \, dm \, \vec{j_s} + \int (x_s^2 + y_s^2) \, dm \, \vec{k_s}$$

عزم العطالة I

$$= P_{y_s z_s} \cdot \dot{\theta} \vec{j_s} + I_{z_s} \dot{\theta} \vec{k_s}$$

وهذا العزم الحركي بالنسبة لنقطة من محور الدوران.

٢- العزم الحركي لجسم صلب يدور حول نقطة ثابتة ولتكن النقطة O :

(الحركة عامة عند)

علماً: y_s ، x_1 ، x_s تقع في مستوي عامد له z_s

و y ، x_1 ، x تقع في مستوي عامد له z

و ψ هي زاوية المبادرة

φ زاوية [illegible]

θ زاوية الترنح

A نقطة من الجسم ⇐ $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{OA}$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}_o = \int_S \vec{r} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OA}) \, dm$$

اعتبار $\vec{OA} = \vec{r}$

نطبق علاقة جيبس

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}_o = \int_S \left[r^2 \vec{\omega} - (\vec{r} \cdot \vec{\omega})\vec{r}\right] dm$$

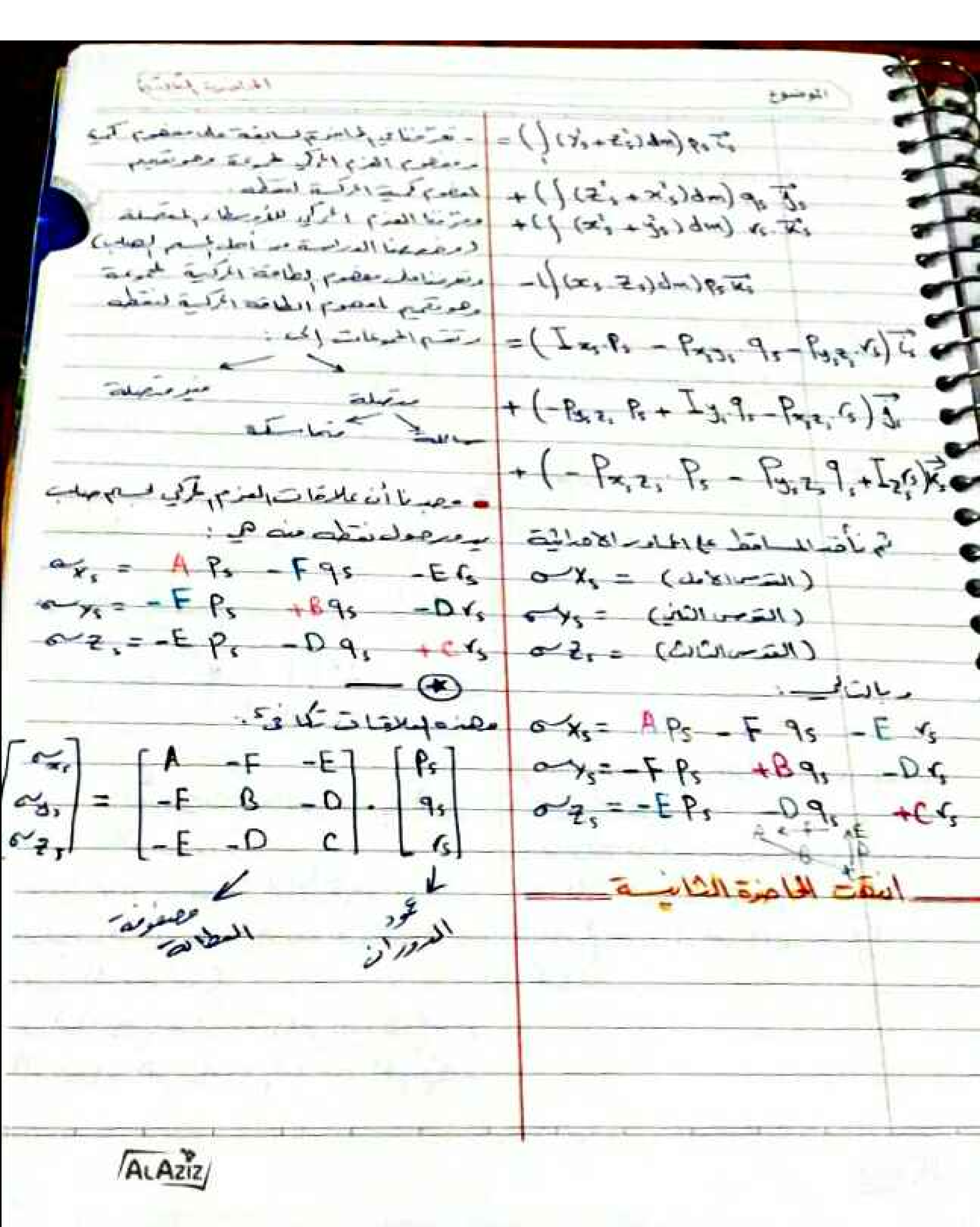
نعوض:

$$= \int_S \left[(x_s^2 + y_s^2 + z_s^2)(p_s\vec{i_s} + q_s\vec{j_s} + r_s\vec{k_s}) - (x_s p_s + y_s q_s + z_s r_s)(x_s\vec{i_s} + y_s\vec{j_s} + z_s\vec{k_s})\right] dm$$

$$\begin{aligned} = \int \Big[& x_s^2 p_s \vec{i_s} + x_s^2 q_s \vec{j_s} + x_s^2 r_s \vec{k_s} \\ & + y_s^2 p_s \vec{i_s} + y_s^2 q_s \vec{j_s} + y_s^2 r_s \vec{k_s} \\ & + z_s^2 p_s \vec{i_s} + z_s^2 q_s \vec{j_s} + z_s^2 r_s \vec{k_s} \\ & - x_s^2 p_s \vec{i_s} - x_s p_s y_s \vec{j_s} - x_s p_s z_s \vec{k_s} \\ & - y_s q_s x_s \vec{i_s} - y_s^2 q_s \vec{j_s} - y_s q_s z_s \vec{k_s} \\ & - z_s r_s x_s \vec{i_s} - z_s r_s y_s \vec{j_s} - z_s^2 r_s \vec{k_s} \Big] dm \end{aligned}$$

تجميع الحدود المتشابهة نجد

ALAZIZ



$$= \left(\int (y_s^2 + z_s^2)\, dm \right) p_s \vec{i_s}$$

$$+ \left(\int (z_s^2 + x_s^2)\, dm \right) q_s \vec{j_s}$$

$$+ \left(\int (x_s^2 + y_s^2)\, dm \right) r_s \vec{k_s}$$

$$- \left(\int (x_s z_s)\, dm \right) p_s \vec{k_s}$$

$$= \left(I_{x_s} p_s - P_{x_s y_s} q_s - P_{y_s z_s} r_s \right) \vec{i_s}$$

$$+ \left(-P_{y_s z_s} p_s + I_{y_s} q_s - P_{x_s z_s} r_s \right) \vec{j_s}$$

$$+ \left(-P_{x_s z_s} p_s - P_{y_s z_s} q_s + I_{z_s} r_s \right) \vec{k_s}$$

ثم نأخذ المساقط على المحاور الإحداثية

$\sigma_{x_s} =$ (القوس الأول)

$\sigma_{y_s} =$ (القوس الثاني)

$\sigma_{z_s} =$ (القوس الثالث)

وبالتالي:

$$\sigma_{x_s} = A p_s - F q_s - E r_s$$

$$\sigma_{y_s} = -F p_s + B q_s - D r_s$$

$$\sigma_{z_s} = -E p_s - D q_s + C r_s$$

انتهت المحاضرة الثانية

- تعرفنا في المحاضرة السابقة على مفهوم كمية الحركة ومفهوم العزم الحركي لجملة وهو تعميم لمفهوم كمية الحركة لنقطة.

وعرفنا العزم الحركي للأوساط المتصلة (وخصصنا الدراسة من أجل الجسم الصلب)

وتعرفنا على مفهوم الطاقة الحركية لجملة وهو تعميم لمفهوم الطاقة الحركية لنقطة

وتقسم الجملة إلى:

- غير متصلة
- متصلة
  - متماسكة
  - سائلة

- وجدنا أن علاقات العزم الحركي لجسم صلب يدور حول نقطة منه هي:

$$\sigma_{x_s} = A p_s - F q_s - E r_s$$

$$\sigma_{y_s} = -F p_s + B q_s - D r_s$$

$$\sigma_{z_s} = -E p_s - D q_s + C r_s$$

ونكتب هذه العلاقات بشكل مصفوفي:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x_s} \\ \sigma_{y_s} \\ \sigma_{z_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_s \\ q_s \\ r_s \end{bmatrix}$$

مصفوفة العطالة — عمود الدوران